Keine Ahnung von Asymptoten

Wie findet man Asymptoten

bei gebrochen rationalen Funktionen

?

Datei Nr. 43008

Stand 11. Februar 2021

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

Das Aufspüren von Asymptoten bei den Schaubildern von gebrochen rationalen Funktionen ist eine wichtige Grundaufgabe. Dabei muss man zwischen zwei grundverschiedenen Vorgängen unterscheiden.

Senkrechte Asymptoten, also Geraden parallel zur y-Achse, an die sich eine Kurve ins Unendliche annähert, also nach oben oder unten, treten an bestimmten Stellen (x-Werte) auf. Dort zeigt die Funktion ein merkwürdiges Verhalten und liefert auch keinen Funktionswert.

Etwas anderes sind waagrechte oder schräge Asymptoten, die graphisch darstellen, dass eine Funktion für x gegen $\pm\infty$ ein bestimmtes Verhalten zeigt.

Man muss streng darauf achten, dass es zwei Beschreibungsmöglichkeiten gibt, die man nicht mischen darf: Die eine beschreibt, was die Funktion an einer „Polstelle" macht oder wie sie sich für x gegen $\pm\infty$ verhält, z. B. dass oder ob sie einem Grenzwert zustrebt. Dem gegenüber steht die Beschreibung, was das Schaubild der Funktion, also die Kurve für geometrische Eigenschaften hat, z. B. die Annäherung an eine Gerade, die man dann Asymptote nennt.

In der Mathe-CD gibt es dazu folgende sehr ausführlichen Texte:

43003 Gebrochen rational – Schnellkurs
43004 Nullstellen-Polstellen-Hebbare Definitionslücken – Trainingsprogramm
43005 Aufgaben: Grenzwerte
43006 Aufgabenblatt

Der hier vorliegende Text 43008 ist eine kompakte Zusammenstellung zum Wiederholen.

Inhalt

1 Definitionsbereiche und Definitionslücken

Bei gebrochen rationalen Funktionen steht x auch im Nenner. Daher kann es Zahlen geben, die bei der Berechnung ihres Funktionswerts zu einer Division durch 0 führen.

Fünf Beispiele: $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{5}{x+3}$, $f_3(x) = \frac{2}{x^2-4}$, $f_4(x) = \frac{2x}{x^2+9}$, $f_5(x) = \frac{x+2}{(x-2)^2}$,

Wir suchen die Zahlen, die zu einer Division durch 0 führen:

(1) $f_1(x) = \frac{1}{x}$ liefert für x = 0 keinen Funktionswert: $f(0) = \cancel{\frac{1}{0}}$ existiert nicht, weil man nicht durch 0 dividieren kann.

Man sagt: **f_1 ist für 0 nicht definiert**. f_1 hat den **Definitionsbereich** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Der Definitionsbereich enthält alle Zahlen aus $\mathbb{R}$, zu denen ein Funktionswert existiert.
Bei gebrochen rationalen Zahlen umfasst der Definitionsbereich alle reellen Zahlen, für die der Nenner nicht Null wird.

(2) $f_2(x) = \frac{5}{x+3}$ Wann wird der Nenner 0? $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$.

Diese Zahl hat keinen Funktionswert. Der Definitionsbereich von f_2 ist also $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

(3) $f_3(x) = \frac{2}{x^2-4}$ Nenner = 0 bedeutet $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2}$

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

(4) $f_4(x) = \frac{8x}{x^2+2}$ Nenner = 0 bedeutet $x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \cancel{x^2 = -2}$. Da ein Quadrat nie negativ werden kann, wird der Nenner nie Null: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

(5) $f_5(x) = \frac{x^2+2}{(x-2)^2}$ Nenner $= 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Weil die Klammer (x-2) zweimal auftritt (als Quadrat), ist x = 2 eine <u>doppelte Lösung</u>, was große Bedeutung haben wird. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Überlegung:

Die Zahlen, die nicht zum Definitionsbereich gehören, besitzen keinen Funktionswert.
Also gibt es auch zu diesen Zahlen keine Punkte im Schaubild der Funktion.
Es gibt denn zwei Möglichkeiten:
Die Kurve hat dort ein Loch oder sie geht nach unten oder oben weg ins Unendliche.
Sie nähert sich dann einer senkrechten Geraden an, die man Asymptote nennt.

2 Senkrechte Asymptote an einer Definitionslücke

(1) An einer Stelle, an der nur der Nenner Null wird, aber nicht der Zähler, verläuft die **Kurve** entlang einer senkrechten Asymptote ins Unendliche. Die **Funktionswerte** gehen nämlich bei Annäherung an diese „**Polstelle**“ gegen ∞ oder $-\infty$

Eine Stelle a heißt Polstelle einer Funktion, wenn die Funktionswerte bei Annäherung an diese Stelle gegen $\pm\infty$ gehen.

Man sollte in der Lage sein, rechnerisch nachzuweisen, was an einer Polstelle passiert.

1. Beispiel $f_1(x) = \frac{1}{x}$: Nenner = 0 ergibt $x = 0$. Da aber 0 keine Nullstelle des Zählers ist, ist 0 eine Polstelle von f_1.

Rechnung zur Annäherung an die Polstelle x = 0:

$f(1) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow P_1(1|1)$ ist Kurvenpunkt.

$f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10 \Rightarrow P_{0,1}(0{,}1|10)$ ist Kurvenpunkt.

$f\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{\frac{1}{100}} = 100 \Rightarrow P_{0,01}(0{,}01|100)$ ist Kurvenpunkt.

$f\left(\frac{1}{1000.000}\right) = 1.000.000 \Rightarrow P_{...}(0{,}000.001|1.000.000)$ ist Kurvenpunkt. Usw.

Man erkennt, dass für $x \to 0$ von rechts (also auf der positiven Seite), $f(x) \to \infty$ geht.

$f(-1) = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow P_{-1}(-1|-1)$ ist Kurvenpunkt.

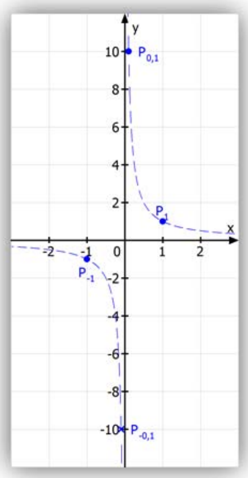
$f\left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{10}} = -10 \Rightarrow P_{-0,1}(-0{,}1|-10)$ ist Kurvenpunkt.

$f\left(-\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{100}} = -100 \Rightarrow P_{-0,01}(-0{,}01|-100)$ ist Kurvenpunkt. Usw

Man erkennt, dass für $x \to 0$ von links (also auf der negativen Seite), $f(x) \to -\infty$ geht.

Das Schaubild:

Man erkennt, dass die Kurve entlang der y-Achse (mit der Gleichung x = 0) ins Unendliche läuft. Die y-Achse ist eine senkrechte Asymptote der Kurve.



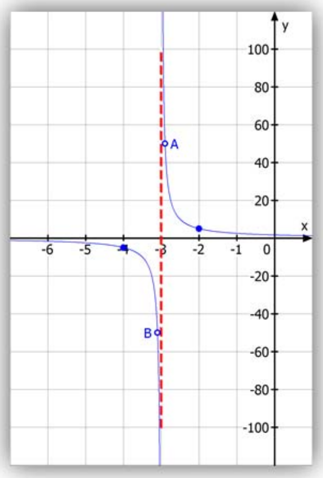
So schreibt man das auf:

Weil die Funktion $f_1(x) = \frac{1}{x}$ die Polstelle x = 0 hat,

besitzt ihr Schaubild $y = \frac{1}{x}$ die senkrechte Asymptote x = 0.

Man muss streng zwischen Funktion und Kurve (Schaubild) unterscheiden:
Die Funktion hat eine Polstelle, die Kurve eine senkrechte Asymptote.
und x = 0 bedeutet einmal eine Stelle (Zahl), und dann eine senkrechte Gerade.
Ich unterscheide Funktion und Kurve auch farblich!

2. Beispiel: $f_2(x) = \frac{5}{x+3}$



Die Funktion hat erkennbar die Polstelle x = -3,
weil dort der Nenner Null wird, aber nicht der Zähler.
Also hat das Schaubild $y = \frac{5}{x+3}$ die senkrechte Asymptote $x = -3$.

Rechnung zur Annäherung an die Asymptote:

Von rechts: $f_2(-2{,}9) = \frac{5}{0{,}1} = 50 \quad \Rightarrow \quad A(-2{,}9\,|\,50) \in K$

$f_2(-2{,}99) = \frac{5}{0{,}01} = 500 \quad \Rightarrow \quad P(-2{,}99\,|\,500) \in K$

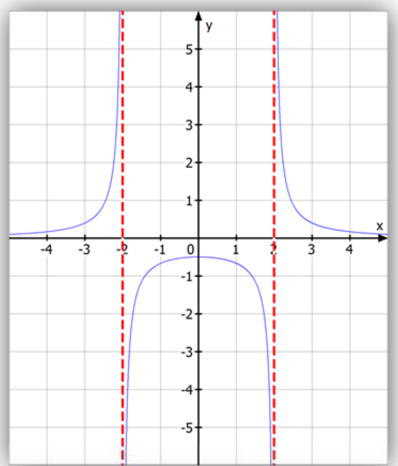
Von links: $f_2(-3{,}1) = \frac{5}{-0{,}1} = -50 \quad \Rightarrow \quad B(-3{,}1\,|\,-50) \in K$

$f_2(-3{,}01) = \frac{5}{-0{,}01} = -500 \quad \Rightarrow \quad Q(-3{,}01\,|\,-500) \in K$

Man erkennt, wie man die Zahlen für die Annäherung wählen kann:

Die Annäherung an x = -3 von rechts geschieht z. B. durch die Zahlenfolge -2,9, -2,99, -2,999 usw.
Die Annäherung an x = -3 von links geschieht z. B. durch die Zahlenfolge -3,1, -3,01, -3,001 usw.

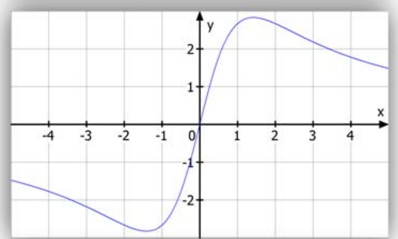
3. Beispiel: $f_3(x) = \frac{2}{x^2-4}$



f hat die Polstellen $x = \pm 2$,
weil dort der Nenner Null wird, aber nicht der Zähler.
Also hat das Schaubild $y = \frac{2}{x^2-4}$ die senkrechten Asymptoten $x = 2$ und $x = -2$.

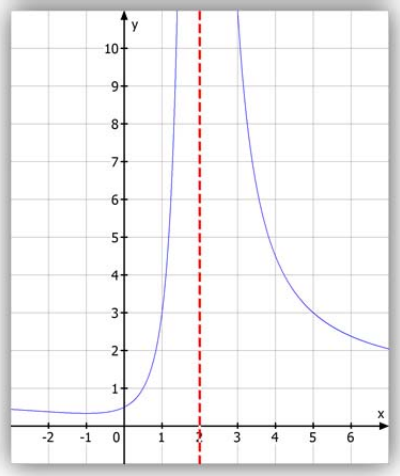
Weil f nur gerade Exponenten hat, ist K symmetrisch zur y-Achse, daher hat die Kurve links „das gespiegelte Verhalten von rechts".

4. Beispiel: $f_4(x) = \frac{8x}{x^2+2}$



Die Funktion f hat keine Polstellen, weil der Nenner keine Nullstellen besitzt (also für keine Zahl Null wird).
Daher hat das Schaubild keine senkrechte Asymptote.

5. Beispiel: $f_5(x) = \frac{x^2+2}{(x-2)^2}$



Weil 2 eine doppelte Nullstelle des Nenners ist (erkennbar am Quadrat der Klammer) ist der Nenner stets positiv, egal, ob man sich von links oder rechts der Polstelle nähert.
Daher ist x = 2 eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

Das Schaubild hat daher die senkrechte Asymptote x = 2, an die sich die Kurve von beiden Seiten in derselben Richtung annähert.

3 Kurvenloch an einer hebbaren Definitionslücke

Ist eine Zahl eine gemeinsame Nullstelle von Zähler und Nenner, dann kann die Kurve dort ein Loch oder eine senkrechte Asymptote haben.

6. Beispiel: $f_6(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

Besonderheit: Der Zähler hat die Nullstelle ± 2, der Nenner hat die Nullstelle 2. Also ist 2 eine gemeinsame Nullstelle von Zähler und Nenner.

Aus diesem Grund ist x = 2 keine Polstelle. Ihr Schaubild hat daher auch keine senkrechte Asymptote, sondern ein (Kurven-) Loch.

Rechnung zur Annäherung an eine gemeinsame Nullstelle von Z. und N.:

Annäherung von links:

$$f(1{,}9) = \frac{1{,}9^2-4}{1{,}9-2} = \frac{-0{,}39}{-0{,}1} = 3{,}9$$

$$f(1{,}99) = \frac{1{,}99^2-4}{1{,}99-2} = \frac{-0{,}0399}{-0{,}01} = 3{,}99$$

$$f(1{,}999) = \frac{1{,}999^2-4}{1{,}999-2} = \frac{-0{,}003999}{-0{,}001} = 3{,}999$$

Annäherung von rechts:

$$f(2{,}1) = \frac{2{,}1^2-4}{2{,}1-2} = \frac{0{,}41}{0{,}1} = 4{,}1$$

$$f(2{,}01) = \frac{2{,}01^2-4}{2{,}01-2} = \frac{0{,}0401}{0{,}01} = 4{,}01$$

$$f(2{,}0001) = \frac{2{,}0001^2-4}{2{,}0001-2} = \ldots = 4{,}0001$$

Beobachtung: Bei Annäherung gegen x = 2 nähern sich die Funktionswerte der Zahl 4 an.

Man sagt: f hat für $x \to 2$ den Grenzwert 4 und schreibt $\boxed{\lim_{x\to 2} f(x) = 4}$.

Empfehlung: Um diese Besonderheit zu entdecken, sollte man zuerst die Nullstellen von Zähler und Nenner berechnen, etwa mit diesem Schema:

Zähler = 0: $x^2-4=0 \iff x_2 = 4 \iff x = \pm 2$

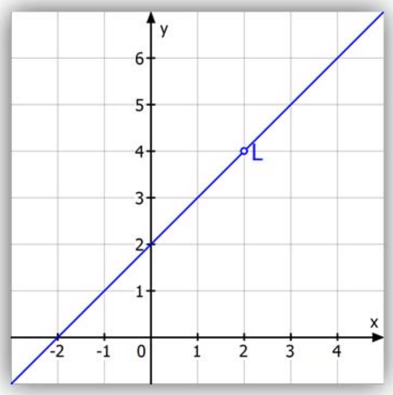
Nenner = 0: $x-2=0 \iff x=2$

Beobachtung: Zähler und Nenner haben die gemeinsame Nullstelle 2.

Methode: Nun faktorisiert man Zähler und Nenner, d. h. man zerlegt sie in Faktoren:

Dann kann man die Klammer $(x-2)$ herauskürzen (weil $2 \notin \mathbb{D}$)und den Funktionsterm vereinfachen:

Umwandlung: $f_6(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = x+2 = f_6{}^*(x)$.



Nach dem Kürzen hat man eine neue Funktion $f_6{}^*(x) = x+2$,

die überall definiert ist, sogar bei x = 2 und liefert: $f_6{}^*(2) = 4$.

Das Schaubild von f_6* hat daher den Kurvenpunkt $L(2\,|\,4)$.

Dieser ist beim Schaubild K_6 von f_6 verboten.

Daher hat K_6 an dieser Stelle ein Loch.

Die Stelle 2 heißt hebbare Definitionslücke

7. Beispiel: $f_7(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 4x}$. **Große Musterlösung**

Bestimme die senkrechten Asymptoten des Schaubilds K_7 der Funktion f_7.

(1) Vorarbeit: Zähler = 0: $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

Nenner = 0: $x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x+4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_3 = -4$

(2) Auswertung für die Funktion:

Nullstellen erhält man wenn $\boxed{Z = 0 \text{ und } N \neq 0}$, also ist $x_2 = 1$ eine Nullstelle von f_7: $f_7(1) = 0$.

Polstellen erhält man wenn $\boxed{N = 0 \text{ und } Z \neq 0}$, also ist $x_3 = -4$ eine Polstelle von f_7:

(d. h. für $x \to -4 \Rightarrow f_7(x) \to \pm\infty$)

Hebbare Definitionslücke wenn $\boxed{Z = 0 \text{ und } N = 0}$, also $x_1 = 0$.

(3) Auswertung für das Schaubild:

Das Schaubild K_7 schneidet die x-Achse in $N(1|0)$, hat die senkrechte Asymptote: x = -4 und ein Loch an der Stelle 0.

Die y-Koordinate des Loches findet man durch Faktorisieren und Kürzen:

Kürzen der Funktion:

$$f_7(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 4x} = \frac{x(x-1)}{x(x+4)} \Rightarrow \boxed{f_7{}^*(x) = \frac{x-1}{x+4}}$$

Die gekürzte Funktion stimmt überall mit f_7 überein, außer bei x = 0. Dort hat sie den Wert $f_7{}^*(0) = -\frac{1}{4}$ und das Schaubild vom K_7* hat den Kurvenpunkt $Z\left(0 \mid -\frac{1}{4}\right)$.

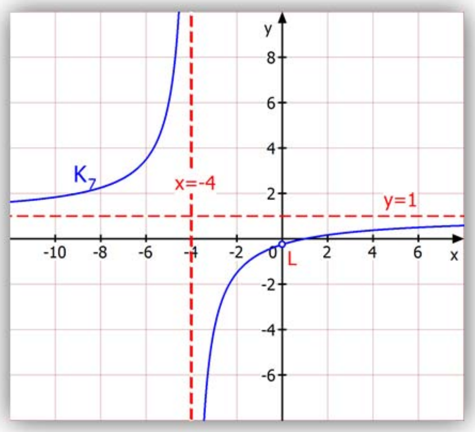
Das Originalschaubild K_7 hat dort ein Loch: $L\left(0 \mid -\frac{1}{4}\right)$.

Das Schaubild K_7 hat außer der senkrechten Asymptote noch eine waagrechte Asymptote, deren Gleichung man über den Grenzwert von f_7 so berechnet:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + 4x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \boxed{\frac{1}{x}}}{1 + \boxed{\frac{4}{x}}} = \frac{1}{1} = 1$$

Die Funktionswerte streben also dem Wert 1 zu, d. h. die Kurve K_7 nähert sich der waagrechten Asymptote $y = 1$ an.

(Siehe Abschnitt 4)



8. Beispiel: **Untersuche die Funktion** $f_8(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$.

Musterlösung

(1) Vorarbeit: Zähler = 0: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

Nenner = 0: $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

(2) Auswertung für die Funktion:

Nullstellen erhält man wenn $\boxed{Z = 0 \text{ und } N \neq 0}$, also ist $x_1 = 2$ eine Nullstelle von f_8: $f_8(2) = 0$.

Polstellen erhält man wenn $\boxed{N = 0 \text{ und } Z \neq 0}$, also ist $x_4 = -2$ eine Polstelle von f_8:

(d. h. für $x \to -2 \Rightarrow f_8(x) \to \pm\infty$)

Hebbare Definitionslücke: wenn $\boxed{Z = 0 \text{ und } N = 0}$, also $x_2 = -1 = x_3$.

(3) Auswertung für das Schaubild:

Das Schaubild K_8 schneidet die x-Achse in $N(2 \mid 0)$,

hat die senkrechte Asymptote: x = -2 sowie ein Loch an der Stelle -1.
Die y-Koordinate des Loches findet man durch Faktorisieren und Kürzen:

Kürzen der Funktion:

$$f_8(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x+1)} \Rightarrow \boxed{f_8{}^*(x) = \frac{x-2}{x+2}}$$

Die gekürzte Funktion stimmt überall mit f_8 überein, außer bei x = -1. Dort hat sie den Wert $f_8{}^*(-1) = -3$ und das Schaubild vom $K_8{}^*$ hat den Kurvenpunkt $Z(-1 \mid -3)$.

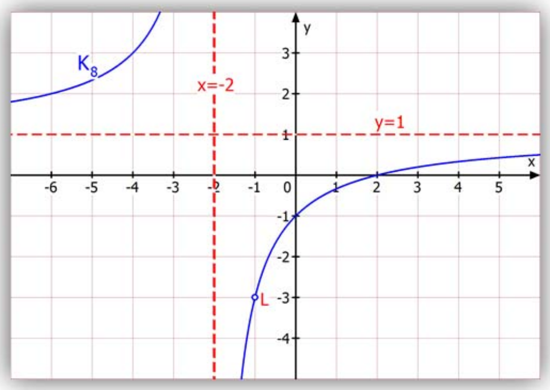
Das Originalschaubild K_7 hat dort ein Loch: $L(-1 \mid -3)$.

Das Schaubild K_8 hat außer der senkrechten Asymptote noch eine **waagrechte Asymptote**, deren Gleichung man über den Grenzwert von f_8 so berechnet:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \boxed{\frac{1}{x}} - \boxed{\frac{2}{x^2}}}{1 + \boxed{\frac{3}{x}} + \boxed{\frac{2}{x^2}}} = \frac{1}{1} = 1$$

Die Funktionswerte streben also dem Wert 1 zu, d. h. die Kurve K_8 nähert sich der waagrechten Asymptote $y = 1$ an.

(Siehe Abschnitt 4.)



9. Beispiel: **Untersuche die Funktion** $f_9(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^3 + x^2}$.

Musterlösung für eine Besonderheit

(1) Vorarbeit: Zähler = 0: $x^2 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0,\ x_2 = 1$

Nenner = 0: $x^3 + x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2(x+1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0,\ x_3 = -1$

(2) Auswertung für die Funktion:

Nullstellen erhält man wenn $\boxed{Z = 0 \text{ und } N \neq 0}$, also ist $x_2 = 1$ eine Nullstelle von f_9: $f_9(1) = 0$.

Polstellen erhält man wenn $\boxed{N = 0 \text{ und } Z \neq 0}$, also ist $x_3 = -1$ eine Polstelle.

Hebbare Definitionslücke wenn $\boxed{Z = 0 \text{ und } N = 0}$, also $x_1 = 0$..

(3) Auswertung für das Schaubild:

Das Schaubild K_9 schneidet die x-Achse in $N(1|0)$, hat eine senkrechte Asymptote x = -1 und ein Loch an der Stelle 0.

Die y-Koordinate des Loches findet man durch Faktorisieren und Kürzen:

Kürzen der Funktion:

$$f_9(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 + x^2} = \frac{x(x-1)}{x^2(x+1)} \;\Rightarrow\; \boxed{f_9^*(x) = \frac{x-1}{x(x+1)}}$$

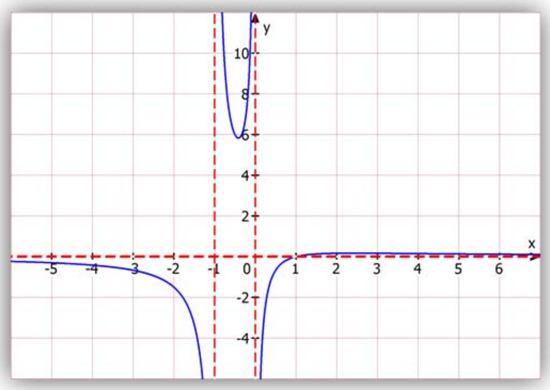
Jetzt muss man erkennen, dass die oben gemachten Aussagen teilweise falsch sind.
Die Stelle 0 tritt im Nenner wegen des Faktors x^2 doppelt auf, so dass x nach dem Kürzen im Nenner stehen bleibt. Also gilt für f_9* und für f_9 gleichermaßen, dass x = 0 eine Polstelle ist und somit beide Schaubilder doch eine senkrechte Asymptote haben: x = 0.
Und die Schaubilder haben kein Loch und stimmen komplett überein.

Auch diese Kurve hat eine waagrechte Asymptote:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x^2 + x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\boxed{\frac{1}{x}} - \boxed{\frac{1}{x^2}}}{1 + \boxed{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1} = 0$$

Also nähern sich die Funktionswerte dem Wert 0.

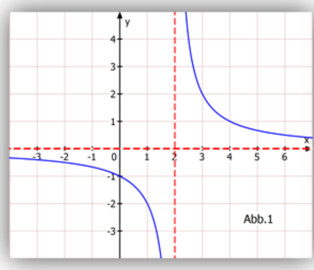
Die Kurve nähert sich also der x-Achse (y = 0) als waagrechter Asymptote an.

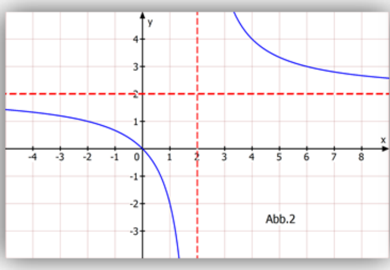


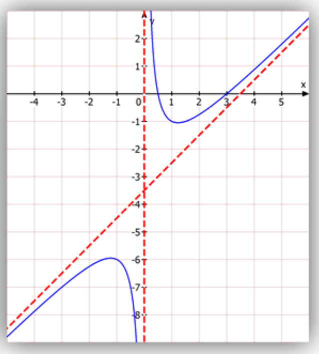
Hinweis: Dies ist immer dann der Fall, wenn der Grad des Nenners größer ist als der des Zählers. In so einem Fall muss man bei der Grenzwertberechnung durch die höchste x-Potenz des Nenners kürzen. (Siehe Abschnitt 4)

4 Asymptoten für $x \to \pm\infty$

Drei *einfache* Beispiele mit unterschiedlichem Verhalten:







$f_{10}(x) = \frac{2}{x-2}$	$f_{11}(x) = \frac{2x}{x-2}$	$f_{12}(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{2x}$
Die x-Achse ist <u>waagrechte Asymptote</u>.	Eine Parallele zur x-Achse ist <u>waagrechte Asymptote</u>	Es gibt eine <u>schräge Asymptote</u>
Grund: Grad N > Grad Z	Grad N = Grad Z	Grad Z = Grad N +1

Die Asymptote ermittelt man, indem man den Grenzwert der Funktion für $x \to \pm\infty$ berechnet.

1. Fall: Ist der Grad des Nenners größer als der des Zählers,

kürzt man durch die höchste x-Potenz des Nenners und berechnet dann den Grenzwert so:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\boxed{\frac{2}{x}}}{1-\boxed{\frac{2}{x}}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

Also hat das Schaubild die waagrechte Asymptote y = 0 (die x-Achse).

2. Fall: Ist der Grad des Nenners gleich dem des Zählers0,

kürzt man durch die höchste x-Potenz und berechnet dann den Grenzwert so:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1-\boxed{\frac{2}{x}}} = \frac{2}{1} = 2$$

Das Schaubild hat die waagrechte Asymptote y = 2 (Parallele zur x-Achse).

3. Fall: Ist der Grad des Zählers größer als der des Nenners,

hat die Funktion für $x \to \pm\infty$ keinen Grenzwert sondern geht gegen $\pm\infty$.

Daher muss man den Funktionsterm durch eine Division zerlegen.

Der ganzrationale Anteil ergibt eine schräge Asymptote

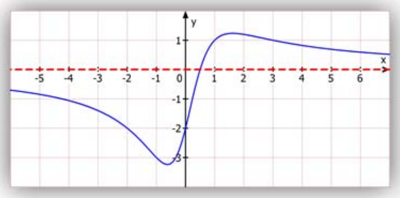
Wenn wie bei $f_{12}(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{2x}$ der ***<u>Nenner keine Summe</u>*** enthält, geschieht die Division

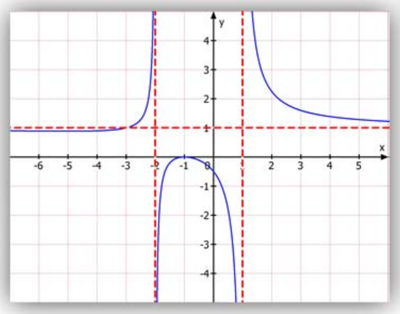
durch Zerlegen in Einzelbrüche: $f_{12}(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{2x} = \underbrace{\frac{2x^2}{2x} - \frac{7x}{2x} + \frac{3}{2x}}_{\text{nur im Kopf !}} = \boxed{x - \frac{7}{2} + \frac{3}{2x}}$

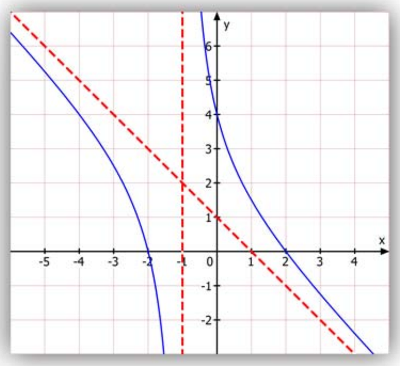
Jetzt muss man folgern: Weil $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\boxed{\frac{3}{x}}}{2} = \frac{0}{2} = 0$ ist, verhält sich f_{12} für $x \to \pm\infty$

wie $g(x) = x - \frac{7}{2}$. Deren Schaubild ist eine schräge Gerade, die **schräge Asymptote**

Drei *komplizierte* Beispiele mit unterschiedlichem Verhalten:







$f_{13}(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$	$f_{14}(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+x-2}$	$f_{15}(x) = \frac{4-x^2}{x+1}$
Die x-Achse ist waagrechte Asymptote.	Eine Parallele zur x-Achse ist waagrechte Asymptote	Es gibt eine schräge Asymptote
Grad N > Grad Z	Grad N = Grad Z	Grad Z = Grad N +1

Grund:

d) Ist der Grad des Nenners größer als der des Zählers, kürzt man durch die höchste x-Potenz des Nenners und berechnet dann den Grenzwert so:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\boxed{\frac{3}{x}}-\boxed{\frac{1}{x^2}}}{1+\boxed{\frac{1}{x^2}}} = \frac{0-0}{1+0} = 0 \quad \text{denn} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^r} = 0 \text{ für bel. } a \neq 0$$

Also hat das Schaubild die **waagrechte Asymptote y = 0** (es ist die x-Achse).

b) Ist der Grad des Nenners gleich dem des Zählers, kürzt man durch die höchste x-Potenz und berechnet dann den Grenzwert so:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\boxed{\frac{2}{x}}+\boxed{\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\boxed{\frac{1}{x}}-\boxed{\frac{2}{x^2}}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

Also hat das Schaubild die **waagrechte Asymptote y = 1** (eine Parallele zur x-Achse).

Zusatz: Für die weitere Untersuchung der Funktion $f_{14}(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+x-2}$ macht man diese Vorarbeit:

Zähler = 0: $x = -1$ (doppelte Lösung)

Nenner = 0: $x^2 + x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Auswertung für die Funktion: Nullstellen (Z=0 und $N \neq 0$) $x_N = -1$

Polstellen: (N=0 und $Z \neq 0$) $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$.

Da Zähler und Nenner keine gemeinsamen Nullstellen haben, gibt es keine hebbaren Definitionslücken.

Auswertung für das Schaubild:

Schnittpunkt mit der x-Achse: $N(-1|0)$. Weil -1 doppelte Lösung ist, ist N ein Berührpunkt.

Senkrechte Asymptoten: $x = 1$ und $x = -2$.

Siehe Schaubild oben.

c) Bei der Funktion $f_{15}(x)=\frac{4-x^2}{x+1}$ ist der Grad des Zählers größer als der des Nenners, hat die Funktion für $x\to\pm\infty$ keinen Grenzwert sondern geht gegen $\pm\infty$.

Daher muss man den Funktionsterm durch eine Division zerlegen. Es entsteht ein ganzrationaler Anteil und ein Restbruch.

Weil der Nenner hier eine Summe enthält, muss man eine Polynomdivision ausführen!

$$f_{15}(x)=\frac{4-x^2}{x+1}$$

$$\begin{array}{l}
\left(-x^2+0x+4\right):(x+1)=-x+1\\
\underline{-\left(-x^2-x\right)}\\
\qquad x+4\\
\qquad \underline{-(x+1)}\\
\qquad\quad 3
\end{array}$$

Zwischenergebnis: $f_{15}(x)=\underbrace{-x+1}_{\text{schräge Asymptote}}+\underbrace{\frac{3}{x+1}}_{\to 0}$

Der Restbruch hat den Grenzwert 0: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\boxed{\frac{3}{x}}}{1+\boxed{\frac{1}{x}}}=\frac{0}{1+0}=0$

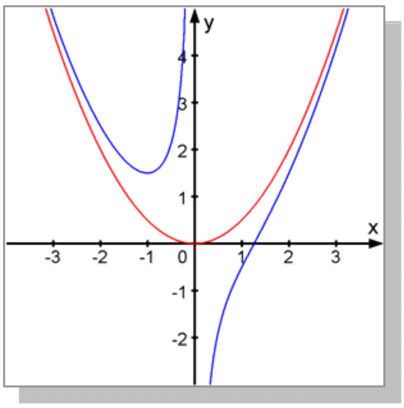
Daher verhält sich f_{15} für $x\to\pm\infty$ wie die ganzrationale Funktion $g(x)=-x+1$.

Deren Schaubild ist eine schräge Gerade, also die **schräge Asymptote y = -x + 1**

Ausblick:

Es gibt auch Funktionen, deren Zählergrad um 2 (und mehr) größer ist als der des Nenners.

Beispiel: $f_{16}(x)=\frac{x^3-2}{2x}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$



Man argumentiert dann ähnlich wie bei f_{15}:

Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$ verhält sich die Funktion für $x\to\pm\infty$ wie die ganzrationale Funktion $g(x)=\frac{1}{2}x^2$, deren Schaubild eine Parabel ist, an die sich K_{16} annähert.

Das Schaubild K_{16} hat also eine **Näherungsparabel.**

Mehr dazu im Text 43003 ab Seite 23.